# آیا عدد صفر چندجمله‌ای است؟

ناصر بروجردیان

دانشگاه صنعتی امیرکبیر – دانشکده ریاضی

## مقدمه

به هنگام بحث از چندجمله‌ای‌ها، سؤالات متعددی پیش می‌آید. آیا عدد صفر چندجمله‌ایست؟ در این صورت، درجه آن چند است؟ آیا $\frac{x(x^۲-۱)}{x^۲-۱}$ چندجمله‌ایست؟ این عبارت پس از ساده‌سازی به صورت $x$ است، اما به ازای همه مقادیر $x$ تعریف نشده است. آیا $|x|\sqrt{x^۲}$ چندجمله‌ایست؟ این عبارت پس از ساده‌سازی به صورت $x^۲$ است و به ازای همه مقادیر $x$ تعریف شده است. بروز این سؤالات، نشان‌دهنده وجود کم‌دقتی در تعاریف و مفاهیم است. اگر همه مفاهیم به درستی تعریف شده باشند، کافیست به تعاریف مراجعه شوند تا معلوم شود چه چیزی در تعریف صدق می‌کند یا نمی‌کند.

البته بروز برخی کم‌دقتی‌ها اجتناب‌ناپذیر است، زیرا سطح برخی از مطالب، ممکن است بالاتر از آن باشد تا بتوان آنها را با دقت کامل در سطح دبیرستان مطرح کرد. مثلاً، مفهوم اعداد حقیقی از همین نوع است و نمی‌توان بحث دقیق و کاملی از اعداد حقیقی را در سطح دبیرستان ارائه کرد. بحث چندجمله‌ای‌ها نیز اندکی پیچیدگی دارد ولی می‌توان با دقت کافی آنها را مطرح ساخت.

## تعریف مرسوم چندجمله‌ای‌ها

معمولاً، در کتاب‌های درسی، تعریف چندجمله‌ای‌ها را از طریق مفهوم «عبارت‌های جبری» بیان می‌کنند. عبارت‌های جبری فرمول‌هایی محاسباتی هستند که روی یک یا چند متغیر عمل می‌کنند. پیدایش ابهام اصلی، از همین مفهوم عبارت‌های جبری شروع می‌شود. آیا عبارت‌های جبری اشیاء ریاضی جدیدی هستند که مشابه اعداد، می‌توانیم با آنها عملیات جبری جمع و ضرب و تقسیم انجام دهیم؟ در این صورت، مهمترین سؤال این است که تساوی دو عبارت جبری را چگونه تشخیص می‌دهیم؟ مهمترین خاصیت یک عبارت جبری در آن است که به ازای برخی مقادیر برای متغیرهایش می‌توان مقداری عددی برای آن عبارت به دست آورد. این ویژگی را

امروزه تابع می‌نامند و از لحاظ تاریخی نیز عبارت‌های جبری، پیشقراولان مفهوم تابع بوده‌اند. آیا دو عبارت جبری را مساوی بدانیم هرگاه به عنوان دو تابع با هم مساوی باشند؟ زمانی که مفهوم عبارت‌های جبری در کتاب‌های درسی مطرح می‌شوند، هنوز مفهوم تابع طرح نشده است و در این مرحله، نباید به عبارت‌های جبری به عنوان تابع نگاه کنیم. بنابراین، اولین ابهام، در مفهوم تساوی دو عبارت جبری است که چه وقت و با چه روشی تساوی دو عبارت جبری را تشخیص می‌دهیم.

چندجمله‌ای‌ها، عبارت‌های جبری ساده‌تری هستند و بحث در باره آنها آسانتر است. در اینجا برای سادگی، صرفاً از چندجمله‌ای‌های یک متغیره بحث خواهیم کرد. هر چندجمله‌ای یک متغیره، به صورت یک محاسبه جبری روی یک متغیر است که در آن فقط از عملیات جمع و ضرب روی آن متغیر و اعداد، استفاده شده است. اگر صرفاً از عمل ضرب استفاده شده باشد، آن عبارت جبری را یک جمله‌ای می‌نامند. هر یک‌جمله‌ای با متغیر $x$ را پس از ساده سازی می‌توان به شکل استاندارد $ax^n$ نوشت. در اینجا باید دقت کرد که به این عبارت به عنوان یک عمل محاسبه روی عدد نامعین $x$ نگاه می‌شود، پس به ازای $a = ۰$ این عبارت با عدد صفر مساوی است. همچنین به ازای $n = ۰$ این عبارت همان عدد $a$ است و اعداد خودشان یک‌جمله‌ای محسوب می‌شوند. با این تعریف، روشن است که عدد صفر یک چندجمله‌ای محسوب می‌شود و همچنین، یک‌جمله‌ای هم محسوب می‌شود. مشکلاتی را که به نظر می‌رسد چندجمله‌ای بودن صفر پدید می‌آورد را بعد از دقت بخشیدن به مفاهیم دیگر بحث خواهیم کرد.

هر چندجمله‌ای به صورت جمع چند یک‌جمله‌ای است و اگر یک‌جمله‌ای‌ها را به شکل استاندارد خود بنویسیم و توان‌های موجود از $x$ را به طور صعودی بنویسیم، آن را شکل استاندارد چندجمله‌ای می‌نامیم. به خاطر وجود شکل استاندارد برای چندجمله‌ای‌ها، تعریف تساوی بین آنها بدون هیچ ابهامی قابل انجام است. طبق تعریف، دو چندجمله‌ای مساویند هرگاه شکل استاندارد آنها یکی باشد. مثلاً

$$۷x^۲ - ۱ + ۳x + ۷ = ۸ - x^۲ + ۴x - ۱ - x + ۸x^۲$$

این تعریف برای عبارت‌های جبری دلخواه قابل انجام نیست، زیرا برای عبارت‌های جبری دلخواه، شکل استاندارد قابل تعریف نیست. در تعریف تساوی بین چندجمله‌ای‌ها هیچ نگاه تابعی وجود ندارد و بدون مفهوم تابع، چندجمله‌ای‌ها و چگونگی عمل جمع و ضرب بین آنها را می‌شناسیم.

## تعریف پیشرفته از چندجمله‌ای‌ها

عملاً، هر چندجمله‌ای که به شکل استاندارد خود نوشته شده باشد، با دنباله ضرایب خود به طور کامل مشخص می‌شود. بنابراین، هر چندجمله‌ای را می‌توان متناظر یک دنباله از اعداد در نظر گرفت که از مرحله‌ای به بعد ثابت صفر است.

$$a_{۰} + a_{۱}x + \cdots + a_n x^n \quad \leftrightarrow \quad (a_{۰}, a_{۱}, \cdots, a_n, ۰, ۰, \cdots)$$

در سطوح پیشرفته‌تر، برای تعریف چندجمله‌ای‌ها فقط همین دنباله ضرایب را در نظر می‌گیرند و هر دنباله از اعداد حقیقی که از مرحله‌ای به بعد ثابت صفر باشد را به عنوان یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی معرفی می‌کنند. روشن است که در این شیوه معرفی چندجمله‌ای‌ها، کسی چندجمله‌ای‌ها را به عنوان تابع در نظر نخواهد گرفت. البته این شیوه معرفی چندجمله‌ای‌ها، مناسب مدرسه نیست و در اینجا فقط برای روشن شدن مفاهیم، صرفاً برای معلمین این روش آورده شده است. با این شیوه معرفی چندجمله‌ای‌ها، جمع و ضرب آنها به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{gathered}
(a_{۰}, a_{۱}, \cdots, a_n, \cdots) + (b_{۰}, b_{۱}, \cdots, b_n, \cdots) = (a_{۰} + b_{۰}, a_{۱} + b_{۱}, \cdots, a_n + b_n, \cdots) \\
(a_{۰}, a_{۱}, \cdots, a_n, \cdots).(b_{۰}, b_{۱}, \cdots, b_n, \cdots) = (c_{۰}, c_{۱}, \cdots, c_n, ۰, ۰, \cdots) \\
c_k = a_{۰}b_k + a_{۱}b_{k-۱} + \cdots + a_k b_{۰}
\end{gathered}$$

توجه داشته باشید که این دنباله‌ها با اندیس صفر شروع می‌شوند. چندجمله‌ای‌هایی که اندیس ۱ به بعد آنها صفر است و فقط اندیس صفر آنها احیاناً ناصفر است با یک عدد حقیقی مشخص می‌شوند و جمع و ضرب آنها همان جمع و ضرب اعداد حقیقی است. یعنی،

$$\begin{gathered}
(a_{۰}, ۰, ۰, \cdots) + (b_{۰}, ۰, ۰, \cdots) = (a_{۰} + b_{۰}, ۰, ۰, \cdots) \\
(a_{۰}, ۰, ۰, \cdots).(b_{۰}, ۰, ۰, \cdots) = (a_{۰}b_{۰}, ۰, ۰, \cdots)
\end{gathered}$$

به همین خاطر به خود حق می‌دهیم، این چندجمله‌ای‌ها را با همان ضریب اندیس صفرشان نشان دهیم و اعداد حقیقی را به عنوان زیرمجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌ها در نظر بگیریم. پس عدد $a$ به عنوان یک چندجمله‌ای همان دنباله $(a, ۰, ۰, \cdots)$ است. با توجه به تعریف جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها، جمع و ضرب یک عدد با چندجمله‌ای‌ها به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{gathered}
a + (b_{۰}, b_{۱}, \cdots, b_n, \cdots) = (a + b_{۰}, b_{۱}, \cdots, b_n, \cdots) \\
a(b_{۰}, b_{۱}, \cdots, b_n, \cdots) = (ab_{۰}, ab_{۱}, \cdots, ab_n, \cdots)
\end{gathered}$$

چندجمله‌ای $(۰,۱,۰,۰,\cdots)$ نقش ویژه‌ای بازی می‌کند و برای آن یک اسم خاص انتخاب می‌کنیم و مثلاً آن را با $\mathfrak{X}$ نشان می‌دهیم. ضرب یک چندجمله‌ای در $\mathfrak{X}$ موجب می‌شود ضرایب آن چندجمله‌ای، یک واحد به جلو حرکت کند، یعنی

$$\mathfrak{X}(b_۰, b_۱, \cdots, b_n, \cdots) = (۰, b_۰, b_۱, \cdots, b_n, \cdots)$$

به ویژه ضرب $\mathfrak{X}$ در خودش به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^۲ &= (۰,۰,۱,۰,۰,\cdots) \\ \mathfrak{X}^۳ &= (۰,۰,۰,۱,۰,۰,\cdots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

با این علامتگذاری‌ها و قراردادها، هر چند جمله‌ای $(a_۰, a_۱, \cdots, a_n, ۰,۰,\cdots)$ را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم.

$$\begin{aligned} (a_۰, a_۱, \cdots, a_n, ۰, \cdots) &= a_۰(۱,۰,۰,\cdots) + a_۱(۰,۱,۰,۰,\cdots) + \cdots + a_n(۰,۰,\cdots,۱,۰,\cdots) \\ &= a_۰ + a_۱\mathfrak{X} + \cdots + a_n\mathfrak{X}^n \end{aligned}$$

به این ترتیب به همان شکل مرسوم چندجمله‌ای‌ها می‌رسیم، ولی یک تفاوت اساسی وجود دارد که در اینجا $\mathfrak{X}$ یک متغیر عددی نیست و یک چندجمله‌ای خاص است، در واقع $\mathfrak{X} = (۰,۱,۰,۰,\cdots)$. مجموعه چندجمله‌ای‌ها، مجموعه مشخصی از اشیاء معین است که بین آنها عملیات جمع و ضرب تعریف شده است و تمام خواص مهم اعمال جمع و ضرب برقرار است، غیر از این که چندجمله‌ای‌ها عموماً وارون‌پذیر نیستند. در واقع تنها چندجمله‌ای‌های وارون‌پذیر، اعداد ناصفرند.

## چندجمله‌ای‌ها و توابع چندجمله‌ای

در هر چندجمله‌ای، اگر چندجمله‌ای خاص $\mathfrak{X}$ را به متغیر عددی $x$ تبدیل کنیم، یک چندجمله‌ای معمولی به دست می‌آوریم که در مدرسه مطرح می‌شود و می‌توانیم آن را به عنوان یک تابع در نظر بگیریم. این گونه توابع را توابع چندجمله‌ای می‌نامند. توجه کنید که چندجمله‌ای و تابع چندجمله‌ای دو مفهوم متفاوتند، اگرچه تشخیص این تفاوت در سطح مدرسه آسان نیست. البته برای دانش‌آموزان تشخیص این تفاوت ساده‌تر است، زیرا دانش‌آموزان هنوز مفهوم تابع را نمی‌شناسند تا مشکلی برای تفکیک کردن داشته باشند. بیشترین مشکل برای

خود معلمین است که هر دو مفهوم را می‌شناسند و باید بتوانند این دو مفهوم را برای خود از هم تفکیک کنند. چندجمله‌ای به عنوان تابع در ذهن معلمین قویتر است، ولی معلمین باید بتوانند به چندجمله‌ای در شکل استاندارد آن نگاه کنند و آن را صرفاً به عنوان یک عبارت جبری یا دنباله ضرایب در نظر بگیرند. با این تفکیک دو مفهوم چندجمله‌ای و تابع چندجمله‌ای از هم جدا خواهند شد.

البته با وجود تفاوت مفهومی بین چندجمله‌ای‌ها و توابع چندجمله‌ای، بین آنها یک تناظر یک به یک برقرار است و هر چندجمله‌ای یک تابع چندجمله‌ای مشخص می‌کند و برعکس و دو چندجمله‌ای مساویند اگر و فقط اگر توابع چندجمله‌ای وابسته به آنها مساوی باشند. همچنین اعمال جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها متناظر اعمال جمع و ضرب توابع چندجمله‌ای می‌باشد. به همین خاطر است که تفکیک این دو مفهوم مشکل شده است.

این اعمال را که برای میدان اعداد حقیقی انجام دادیم برای هر میدان دیگری هم می‌توانیم انجام دهیم، به ویژه برای میدان‌های متناهی می‌توان دید که مجموعه چندجمله‌ای‌های آن با مجموعه توابع چندجمله‌ای آن یکسان نیست و اولی نامتناهی و دومی متناهی است. در میدان‌های نامتناهی، بین چندجمله‌ای‌های آن و توابع چندجمله‌ای آن، یکسانی برقرار است.

## درجه چندجمله‌ای‌ها

به طور شهودی، بزرگترین توانی از $\mathfrak{x}$ که در یک چندجمله‌ای رخ می‌دهد را درجه آن چندجمله‌ای می‌نامند. در چندجمله‌ای‌هایی که حداقل یک جمله ناصفر دارند این مفهوم بدون ابهام است ولی برای چندجمله‌ای صفر که همه جملات آن به صورت $0.\mathfrak{x}^n$ است نمی‌توان بزرگترین $n$ را تعیین کرد. بنابراین مفهوم درجه، فقط برای آن چندجمله‌ای‌هایی قابل تعریف است که حداقل یکی از ضرایب آنها ناصفر باشد. به طور دقیق‌تر درجه یک چندجمله‌ای ناصفر مانند $(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$ برابر است با بزرگترین اندیس $k$ که $a_k \neq 0$ . روشن است که این تعریف فقط برای چندجمله‌ای‌های ناصفر اعتبار دارد و برای چندجمله‌ای صفر، درجه، تعریف نمی‌شود.

یک اشتباه رایج آن است که هر چندجمله‌ای باید درجه‌ای داشته باشد، پس صفر هم باید درجه‌ای داشته باشد، یا آن که صفر را از جرگه چندجمله‌ای‌ها خارج کنیم. اما، صفر، چندجمله‌ای است ولی درجه برای آن تعریف نمی‌شود. این قبیل استثنائات در مفاهیم رخ می‌دهند، مثلاً تقسیم بر صفر نیز قابل تعریف نیست و کسی نمی‌گوید چون صفر یک عدد است پس باید بتوانیم بر آن تقسیم کنیم. البته، تعریف کردن در ریاضیات کار

مشکلی نیست و اگر مایل باشیم می‌توانیم برای صفر نیز درجه تعریف کنیم، ولی هر تعریفی باید فایده‌ای در بهتر بیان کردن قضایا داشته باشد و به ویژگی مهمی اشاره داشته باشد. تعریف درجه برای صفر، هیچ ویژگی خاصی را برای صفر نشان نخواهد داد و در بیان هیچ قضیه‌ای کاربرد نخواهد داشت. مثلاً، درجه حاصلضرب دو چندجمله‌ای ناصفر برابر مجموع درجات آن دو چندجمله‌ای است و درجه مجموع دو چندجمله‌ای ناصفر کوچکتر یا مساوی ماکزیموم درجه آن دو چندجمله‌ای است. اگر بخواهیم برای صفر درجه‌ای تعریف کنیم که این مطلب برای چندجمله‌ای صفر هم برقرار باشد، باید درجه چندجمله‌ای صفر را $-\infty$ تعریف کنیم که روشن است معنای قابل قبولی ندارد.

نکته دیگری که در چندجمله‌ای‌ها پیش می‌آید، شمردن تعداد جمله‌های ناصفر آن است. اگر در یک چندجمله‌ای ناصفر، $k$ جمله غیر متشابه ناصفر وجود داشته باشد، آن را یک $k$-جمله‌ای می‌نامند. با این تعریف، یک‌جمله‌ای‌های ناصفر، مجدداً یک‌جمله‌ای هستند، اما این تعریف، برای صفر، تعداد جمله، تعریف نمی‌کند. اما قبلاً، بنا به تعریف، صفر را یک‌جمله‌ای محسوب کرده‌ایم. اشکالی که این مطلب، پیش آورده، این است که اگر مثلاً دو یک‌جمله‌ای غیرمتشابه را جمع کنیم باید یک دوجمله‌ای به دست آوریم، در حالی که $x + ۰ = x$ . این پارادکس نشان می‌دهد که در جایی اشتباه کرده‌ایم و این اشتباه در همین فکر ساده است که « اگر دو یک‌جمله‌ای غیرمتشابه را جمع کنیم یک دوجمله‌ای به دست می‌آید». حرف درست آن است که « اگر دو یک‌جمله‌ای غیرمتشابه ناصفر را جمع کنیم یک دوجمله‌ای ساخته می‌شود». بنابراین، در اینجا نیز باید صفر را کنار بگذاریم و مطلب مورد نظر را برای چندجمله‌ای‌های ناصفر بیان کنیم.

## تقسیم چندجمله‌ای‌ها

مفهوم بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر هم، همانند بخش‌پذیری اعداد طبیعی، قابل تعریف است و اگر لازم باشد می‌توانیم از نماد خط کسری برای انجام عمل تقسیم استفاده کنیم. اگر برای سه چندجمله‌ای، تساوی $p(x) = q(x)a(x)$ برقرار باشد گوییم $p(x)$ بر $q(x)$ بخش‌پذیر است و می‌نویسیم $\frac{p(x)}{q(x)} = a(x)$ .

مثلاً $\frac{x^۲-۱}{x-۱} = x + ۱$ . یکی از مشکلاتی که این تساوی به وجود می‌آورد، آن است که گفته می‌شود سمت چپ تساوی به ازای $x = ۱$ تعریف نشده است و تساوی فقط به ازای $x$های مخالف ۱ برقرار است. این سخن

ناشی از عدم تفکیک چندجمله‌ای به عنوان یک عبارت جبری و چندجمله‌ای به عنوان تابع است. همانطور که گفتیم چندجمله‌ای و تابع چندجمله‌ای را باید از هم تفکیک کنیم. تساوی $\frac{x^۲-۱}{x-۱} = x + ۱$ را اگر در مجموعه چندجمله‌ای‌ها در نظر بگیریم، کاملاً درست و بی‌نقص است زیرا این تساوی در مجموعه چندجمله‌ای‌ها به معنای تساوی $x^۲ - ۱ = (x-۱)(x+۱)$ است که درست است. اما اگر این تساوی را در مجموعه توابع چندجمله‌ای در نظر بگیریم و عمل تقسیم، همان تقسیم توابع باشد، در این صورت به دامنه این توابع باید توجه کرد و گفت این تساوی، تساوی بین دو تابع با دامنه‌های $\mathbb{R} - \left\{۱\right\}$ است.

حال می‌توانیم به سؤالات ابتدای مقاله نیز جواب دهیم. آیا $\frac{x(x^۲-۱)}{x^۲-۱}$ چندجمله‌ایست؟ ابتدا باید مشخص کرد که آیا این تقسیم، بین چندجمله‌ای‌ها انجام می‌شود یا بین توابع چندجمله‌ای. این تقسیم، به عنوان تقسیم بین چندجمله‌ای‌ها یک چندجمله‌ای است و همان چندجمله‌ای $x$ است. اما، اگر این تقسیم بین توابع چندجمله‌ای باشد، حاصل تابع $x$ با دامنه $\mathbb{R} - \left\{\pm۱\right\}$ است.

آیا $|x|\sqrt{x^۲}$ چندجمله‌ایست؟ اگر چندجمله‌ای عبارتی جبری باشد که در آن فقط از اعمال جمع و ضرب استفاده شده باشد، این عبارت چنین نیست و چندجمله‌ای نخواهد بود. اما، اگر به این عبارت، به عنوان یک تابع نگاه کنیم، با تابع چندجمله‌ای $x^۲$ مساوی است. بنابراین، این عبارت به عنوان یک عبارت جبری، چندجمله‌ای نیست ولی به عنوان یک تابع، همان تابع چندجمله‌ای $x^۲$ است.